Une famille d'applications linéaires liée à l'hypothèse de Riemann généralisée

Eric Saias

Une famille d'applications linéaires liée à l'hypothèse de Riemann généralisée

Eric SAIAS

20 juin 2013

Résumé

Nous montrons qu'une manière d'aborder la piste presque-périodique pour l'hypothèse de Riemann généralisée consiste à étudier une certaine famille d'applications linéaires.

1 Introduction

Pour tous réels $1/2 < \alpha < \beta < 1$ et $\gamma > 0$, notons $A_{\alpha,\beta,\gamma} = (a_{\alpha,\beta,\gamma}(m,n))_{m,n\geq 1}$ la matrice infinie définie par

$$a_{\alpha,\beta,\gamma}(m,n) = \frac{(\frac{1}{mn})^\alpha - (\frac{1}{mn})^\beta}{\log(mn)} \cdot \frac{\sin[\gamma \log(m/n)]}{\log(m/n)}$$

avec les conventions $\frac{(\frac{1}{1})^\alpha - (\frac{1}{1})^\beta}{\log 1} = \beta - \alpha$ et $\frac{\sin[\gamma.0]}{0} = \gamma$.
Les matrices $A_{\alpha,\beta,\gamma}$ sont symétriques définies positives. On peut donc définir leur décomposition de Cholesky $A_{\alpha,\beta,\gamma} = {}^tU_{\alpha,\beta,\gamma}\ U_{\alpha,\beta,\gamma}$ où $U_{\alpha,\beta,\gamma}$ est triangulaire supérieure infinie avec des réels strictement positifs sur la diagonale. Nous montrons ici qu'une variante de la piste presque-périodique pour l'hypothèse de Riemann généralisée passe par une bonne connaissance des applications linéaires dont les $U_{\alpha,\beta,\gamma}$ sont les matrices dans la base canonique.

2 Applications linéaires u_K et matrices U_K

Précisons le lien ici entre application linéaire et matrice. De manière générale désignons par K un compact d'intérieur non vide du demi-plan $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 0\}$. On définit alors le produit scalaire de l'espace de Hilbert $L^2(K)$ par

$$\langle f, g\rangle_{L^2(K)} \;=\; \iint\limits_{\sigma+i\tau\in K} \overline{f(\sigma+i\tau)}\; g(\sigma+i\tau)\; d\sigma\; d\tau.$$

Posons $e_n := \frac{1}{n^s}$. La famille $(e_n)_{n\geq 1}$ est une famille libre de $L^2(K)$. On peut donc considérer la famille orthonormale $(e'_n(K))_{n\geq 1}$, obtenue par orthonormalisation de Gram-Schmidt de la famille $(e_n)_{n\geq 1}$. Soit E l'espace vectoriel des suites x de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ dont l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet $f_x(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(k)}{k^s}$ est ≤ 0. Pour x dans E, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(k)}{k^s}$ converge aussi dans $L^2(K)$. De plus $\|f_x(s)\|^2_{L^2(K)} = \sum_{n\geqslant 1} |\langle e'_n(K), f_x(s)\rangle_{L^2(K)}|^2$. On peut donc définir l'application linéaire

$$\begin{aligned} u_K : E &\longrightarrow l^2(\mathbb{N}^*) \\ x &\longmapsto (\langle e'_n(K), f_x(s)\rangle)_{n\geq 1} \end{aligned}$$

On appelle base canonique la famille de suites $(\delta_n)_{n\geq 1}$ où $\delta_n(k)$ vaut 1 si $k = n$ et 0 sinon. Cette famille constitue une base de F, le sous-espace vectoriel de E formé des suites à support fini. On a $u_K(F) \subset F$; la restriction de u_K à F définit donc un endomorphisme de F : notons U_K sa matrice dans la base canonique.

Choisissons maintenant $K = \{s \in \mathbb{C} : \alpha \leq Re(s) \leq \beta \; et \mid Im(s) \mid \leq \gamma\}$. On vérifie alors que $\langle e_m, e_n\rangle_{L^2(K)} = 2a_{\alpha,\beta,\gamma}(m,n)$ et que $U_K = \sqrt{2}\; U_{\alpha,\beta,\gamma}$.

3 D'autres notations

Soit χ un caractère de Dirichlet. Rappelons que l'on note usuellement $L_\chi(s)$ le prolongement méromorphe de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(k)}{k^s}$; on note également $\zeta(s) = L_1(s)$. Par ailleurs, pour tout réel t, nous notons ici $x_\chi(t)$ la suite définie par

$$x_\chi(t)(k) = \begin{cases} (-1)^k k^{it} & si\ \chi\ est\ principal \\ \chi(k)\; k^{it} & si\ \chi\ est\ non\ principal. \end{cases}$$

Posons $S = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < Re(s) < 1\}$ et désignons par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Notons enfin
$K(\alpha, \beta, \gamma) = \{s \in \mathbb{C} : \alpha \leq Re(s) \leq \beta \; et \mid Im(s) \mid \leq \gamma\}$.

4 Un critère de récurrence dans l^2 pour l'hypothèse de Riemann généralisée

Théorème. *Soit χ un caractère de Dirichlet. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

$$L_\chi(s) \text{ } ne \text{ } s'annule \text{ } pas \text{ } dans \text{ } le \text{ } demi-plan \text{ } \{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 1/2\} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \textit{Pour tous reels } \alpha, \beta, \gamma \textit{ et } \varepsilon \textit{ avec } 1/2 < \alpha < \beta < 1, \gamma > 0 \textit{ et } \varepsilon > 0, \textit{ on a} \\ \liminf_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\lambda\{t \in [-T,T] : \|u_{K(\alpha,\beta,\gamma)}(x_\chi(t) - x_\chi(0))\|_2 < \varepsilon\} > 0 \end{cases} \tag{2}$$

Démonstration. Notons

$$L^*_\chi(s) := \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^s} = (2^{1-s}-1)\zeta(s) & \textit{si } \chi \textit{ est principal} \\ L_\chi(s) & \textit{si } \chi \textit{ est non principal} \end{cases}$$

On munit l'ensemble $HolS$ des fonctions holomorphes sur S de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de S.

Montrons d'abord que (1) est équivalente à

$$\begin{cases} \textit{pour tout voisinage } V \textit{ de } L^*_\chi(s), \textit{on a} \\ \liminf_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\lambda\{t \in [-T,T] : L^*_\chi(s-it) \in V\} > 0 \end{cases} \tag{3}$$

Dans le travail de Bagchi [2], on peut remplacer les limites supérieures par les limites inférieures sans changer les preuves. En effectuant cette substitution dans le *theorem 3.7*, on obtient directement l'équivalence de (1) et (3) dans le cas où χ est non principal. Pour χ principal, il faut travailler un poil plus. Toutes les assertions (1) correspondant à un caractère principal sont équivalentes entre elles, et en particulier à celle correspondant au caractère de Dirichlet modulo 2. En remplaçant limite supérieure par limite inférieure dans le *theorem 4.11* de [2], on obtient donc que (1) entraîne (3). Réciproquement supposons (3). En reprenant alors le raisonnement du *theorem 3.7* de [1] qui utilise le théorème de Rouché, on obtient l'hypothèse de Riemann pour $\zeta(s)$, et donc aussi (1).

Soient K et K' deux compacts de S tels que $K' \subset \overset{\circ}{K}$. Il existe alors (cf. *lemma 4.8.6* de [3]) une constante $c > 0$ telle que pour toute fonction holomorphe $f(s)$ sur S, on a $max_{s\in K'}|f(s)| \leq c\|f\|_{L^2(K)}$. Cela permet de vérifier que la topologie sur $Hol(S)$ définie par la famille de normes $\|f\|_{L^2(K(\alpha,\beta,\gamma))}$ où $1/2 < \alpha < \beta < 1$ et $\gamma > 0$, coïncide avec la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de S. On peut donc récrire (3) sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l}\textit{Pour tous reels } \alpha, \beta, \gamma \textit{ et } \varepsilon \textit{ avec } 1/2 < \alpha < \beta < 1, \gamma > 0 \textit{ et } \varepsilon > 0, \textit{ on a} \\ \liminf_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \lambda\{t \in [-T, T] : \|L_\chi^*(s - it) - L_\chi^*(s)\|_{L^2(K(\alpha,\beta,\gamma))} < \varepsilon\} > 0\end{array}\right.$$

Or en notant $K = K(\alpha, \beta, \gamma)$, on a

$$\|L_\chi^*(s - it) - L_\chi^*(s)\|_{L^2(K)} = \| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x_\chi(t) - x_\chi(0))(k)}{k^s} \|_{L^2(K)}$$

$$= \| \sum_{n \geqslant 1} (u_K(x_\chi(t) - x_\chi(0)))_n \; e'_n(K) \|_{L^2(K)} = \|u_K(x_\chi(t) - x_\chi(0))\|_2 \; .$$

Cela conclut la preuve du théorème.

□

Je tiens ici à remercier Pierre Mazet, Damien Simon et Andreas Weingartner, d'une part pour les discussions que nous avons eues sur ce sujet, et d'autre part pour leur LaTeXaide !

Références

[1] B. Bagchi, *A joint universality theorem for Dirichlet L-functions*, Math. Z., **181** (1982), 319-334.

[2] B. Bagchi, *Recurrence in topological dynamics and the Riemann Hypothesis*, Acta Math. Hung. **50** (1987), 227-240.

[3] A. Berenstein and R. Gay, Complex Variables An Introduction, Graduate Texts in Mathematics 125, Springer, 1991.